MATEMATIKA

EMELT SZINT

Fontos tudnivalók

A feladatok megoldására 240 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.

A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.

A II. részben öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor az utolsó feladatra nem kap pontot!

☐

A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!

A feladatok megoldásának gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!

Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetőek legyenek!

A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania; elég csak a tétel megnevezését említeni, *de alkalmazhatóságát röviden indokolni kell.* Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítás minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában alkalmazhatóságát indokolja.

A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!

A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.

Minden feladatnál csak egyféle megoldás értékelhető.

I.

1. Egy családi ünnepségre Kati 2 liter 25%-os és 1,5 liter 50%-os őszibaracklevet, valamint 2 liter 12,5%-os és 1,5 liter 40%-os narancslevet vásárolt.

a) Az összejövetel előtt Kati összeöntötte a kétféle őszibaracklevet. Milyen töménységű italt kapott? (3 pont)

b) Legfeljebb hány liter 30%-os narancslevet lehet keverni a rendelkezésre álló két doboz különböző töménységű narancsléből? (5 pont)

c) A 1,5 liter 40%-os narancslevet elkezdjük hígítani úgy, hogy egyenletesen töltjük hozzá a 2 liter 12,5%-os narancslevet. Adja meg a hozzátöltött hígabb narancslé mennyiségének függvényében a keverék töménységét! (4 pont)

Kovetelmenyek_2006.indd 133 2005. 11. 24. 20:15:22
Process Black

2. a) **Állapítsa meg, hogy az alábbi három állítás közül melyik igaz, melyik hamis és indokolja választását!**
A: Ha a férfiak között több a szemüveges ember, mint a nem szemüveges, akkor a szemüveges emberek között is több a férfi, mint a nő. (3 pont)
B: Adott a **D** és az **E** halmaz. Ha $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ és $\mathbf{E} \subset \mathbf{D}$, akkor ebből következik, hogy $\mathbf{D} = \mathbf{E}$. (3 pont)
C: A páros számok halmazának számossága megegyezik az egész számok halmazának számosságával. (3 pont)

b) **Rajzoljon egy olyan egyszerű gráfot, amelynek 6 pontja van, és ezek közül három elsőfokú, kettő másodfokú és egy harmadfokú!** (3 pont)

3. **Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!**

$$\left.\begin{aligned} 5^y \cdot 25^x &= 125 \\ 2\log_3(x+y) - \log_3 x &= \log_3 4 \end{aligned}\right\}$$
(13 pont)

4. **1997-től 2004-ig Németországban az összes élelmiszertermékhez képest a biotermékek arányát az alábbi táblázat szemlélteti.**

Év	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Százalék	1,2	1,4	1,5	1,6	2,1	2,3	2,4	2,7

A következő táblázat az egyes években biotermékekből származó forgalom értékét tartalmazza.

Év	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Forgalom értéke (milliárd euró)	1,7	1,8	2,0	2,1	2,7	3,0	3,1	3,5

a) Készítse el azt az oszlopdiagramot, amely a megadott nyolc évben a teljes élelmiszer-forgalom adatait szemlélteti! (6 pont)
b) Tekintsük az inflációt a nyolc év alatt a megelőző évhez képest mindvégig évi 2 százaléknak. Hány százalékkal csökkent 2004-re az összes élelmiszer-forgalom értéke az 1997. évhez viszonyítva (1997. évi áron számolva)? (5 pont)
c) Egy élelmiszer-forgalmazó cég húsféleségekből származó elmúlt nyolc évi forgalmának mediánja 2,1 milliárd euró, módusza 2,0 milliárd euró és számtani közepe 1,9 milliárd euró. Melyikből tudja a teljes nyolcéves forgalmat kiszámítani? Mennyi ez a forgalom? (3 pont)

II.

Az 5–9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania, a kihagyott feladat sorszámát írja be a „Fontos tudnivalók” c. fejezetnél az üres négyzetbe!

5. **Egy ókori görög színház félkör alakú nézőterén a harmadik sorban 330, a nyolcadikban pedig 405 ülőhely van. Az ülőhelyek száma soronként mindig ugyanannyival nő.**
a) Hány ülőhely van az első sorban? (5 pont)
b) Hány férőhelyes ez a nézőtér, ha összesen 13 sor van? (3 pont)
c) A századik néző megérkezése után az első száz néző között három különböző vázát sorsolnak ki. Hányféleképpen lehet kiosztani a három vázát? (3 pont)

d) Az első sort a meghívott előkelőségek – közöttük 50 házaspár – töltik meg. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha minden férj a felesége mellett ül? (5 pont)

6. Egy kalapban – tapintásra egyforma – 5 fehér, 4 sárga és 1 piros golyó van. Ebből hármat húzunk ki visszatevés nélkül.

a) Mennyi az A, B, C események valószínűsége?
A: mind a három golyó fehér.
B: mind a három golyó más színű.
C: legalább 2 fehér golyó van a kihúzottak között. (9 pont)

b) Miért nem független az A és a C esemény? (2 pont)

Szabolcs a következő játékot ajánlja Mártonnak a fenti golyókkal. Fizet neki a játék kezdetén 5 Ft-ot, s utána elkezdi visszatevés nélkül kihúzni a kalapból a golyókat, amíg a piros golyót ki nem húzza. Ha ez a k-adik húzásnál következik be (k értéke legfeljebb 5 lehet), akkor Márton fizet Szabolcsnak 2^k Ft-ot. Ha Szabolcs az ötödik húzásra sem húzza ki a piros golyót, akkor Márton megúszta fizetés nélkül, és megnyerte az 5 Ft-ot.

c) Szabolcsnak vagy Mártonnak kedvezőbb-e ez a játék? Állítását számítással igazolja! (5 pont)

7. a) **Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!**

$$\left|(x^2+3x+1)-5x\right|<\left|(x^2+3x+1)-(3x+2)\right|$$ (8 pont)

b) Az $x\mapsto 5x$ és az $x\mapsto 3x+2$ függvények közül melyik közelíti jobban az $x\mapsto x^2+3x+1$ másodfokú függvényt az $x=1$ hely „kis” környezetében? Válaszát indokolja! (3 pont)

c) Mekkora hibával közelíti az $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ intervallumon az $x\mapsto x^2+3x+1$ másodfokú függvény alatti területet az $x\mapsto 5x$ függvény alatti terület? (5 pont)

8. Adott a koordinátáival az *A, B, C* és *D* pont. *A*(0; 0), *B*(6; 0), *C*(6; 8) és *D*(–9; 9).

a) Határozza meg az $ABCD$ négyszög D csúcsánál lévő szöget! (6 pont)

b) Mekkora annak a körnek a sugara, amely mind a négy ponttól egyenlő távolságra van, és nem tartalmazza a belsejében a D pontot? (7 pont)

c) Hány olyan kör rajzolható, amelyik mind a négy ponttól egyenlő távolságra van? (3 pont)

9. Egy, az Egyenlítő mentén fekvő városban felállított emlékmű háromszög alapú gúla, amelynek csúcsait jelöljük *A, B, C, D*-vel. A gúla *ABC* alaplapja egyenlő szárú háromszög, amelyben *AB* = *AC* = 4 m. A gúla *AD* éle 8 méter hosszúságú. Délben, amikor a Nap sugarai merőlegesen tűznek a földre, a gúla alaplapját az árnyék négyzetté egészíti ki. Mekkora kőfelületet kell tisztán tartania az emlékmű gazdájának? (16 pont)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

1. a) 2 liter 25%-os lében 0,5 liter gyümölcs van. 1 pont
1,5 liter 50%-os lében 0,75 liter gyümölcs van. 1 pont
Így az összeöntés után kapott 3,5 liter lében 1,25 liter gyümölcs van, ami

$\frac{1{,}25}{3{,}5}\cdot 100 \approx 35{,}7\,\%$-os italt jelent. 1 pont

Összesen: 3 pont

b) Hígítsuk a 1,5 liter 40%-os narancslevet a másikkal.
Jelölje z a 12,5%-os narancslé szükséges mennyiségét. 1 pont
$1{,}5\cdot 0{,}4+0{,}125z=0{,}3\cdot(1{,}5+z)$ 1 pont
$z\approx 0{,}86$ 1 pont
Tehát legfeljebb $1{,}5+0{,}86=2{,}36$ liter 30%-os narancslevet lehet keverni, 1 pont
hiszen a maradék 12,5%-osból hozzátöltve már csak hígítani tudjuk a keveréket. 1 pont

Összesen: 5 pont

c) Jelölje y annak a keveréknek a töménységét, amelyet a 40%-os narancsléből nyerünk x liter 12,5%-os hozzáöntésével.

$1{,}5\cdot 0{,}4+0{,}125x=\frac{y}{100}\cdot(1{,}5+x)$ 2 pont

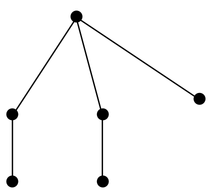
Ebből y-t kifejezve: $y(x)=\frac{12{,}5x+60}{x+1{,}5}$. 2 pont

Összesen: 4 pont

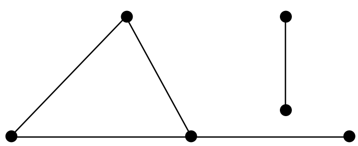
2. a) A: hamis, 1 pont
mert ellenpélda adható: egy 200 fős társaságban van 100 szemüveges nő és 100 férfi, akik közül 60 szemüveges. 2 pont
B: igaz, 1 pont
mert ez azt jelenti, hogy D minden elemét E is tartalmazza és E minden eleme D-nek is eleme, tehát D és E elemei azonosak. 2 pont
C: igaz, 1 pont
mert mindkettő kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthet a természetes számok halmazával, azaz mindkettőt sorozatba tudjuk rendezni. 2 pont

Összesen: 9 pont

A C indoklásakor elegendő az is, ha arra hivatkozik, hogy mindkét halmaz megszámlálható számosságú.

b) 

vagy



3 pont

Összesen: 3 pont

Elegendő egy jó gráf megadása.

3. Az első egyenletből: $5^{y+2x}=5^3$. 3 pont
Az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt:
$y+2x=3$ (1) 1 pont

A második egyenletből: $\log_3 \frac{(x+y)^2}{x} = \log_3 4$. 2 pont

A logaritmus függvény kölcsönös egyértelműsége miatt:

$\frac{(x+y)^2}{x} = 4$ (2) 1 pont

Az (1) és (2) egyenletből álló egyenletrendszerből a következő másodfokú egyenletet kapjuk:
$x^2 - 10x + 9 = 0$. 2 pont
Ennek gyökei: $x_1 = 9$ és $x_2 = 1$. 1 pont
Visszahelyettesítve (1)-be: $y_1 = -15$ és $y_2 = 1$. 1 pont
Ellenőrzés:
(9; −15) nem megoldás; 1 pont
(1; 1) számpár megoldás. 1 pont

Összesen: 13 pont

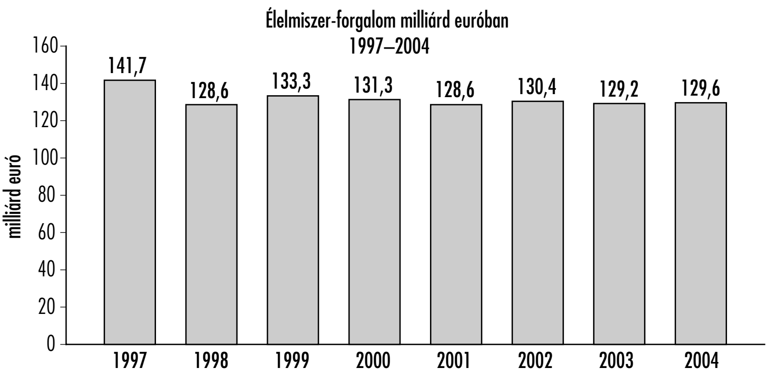
Ha a tanuló vizsgálja az értelmezési tartományt, és ennek alapján az első gyökpárt kizárja, a második gyökpárt pedig az ÉT alapján elfogadja (se nem ellenőrzi, se nem hivatkozik ekvivalens átalakításokra), akkor maximum 12 pont jár.
Ha a feladat megoldása során a tanuló csak az értelmezési tartományt vizsgálja, és más értékelhető elemet nem tartalmaz a megoldása, akkor a helyes értelmezési tartomány megállapításáért 1 pont jár.

4. a)

Év	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**
milliárd euró	141,7	128,6	133,3	131,3	128,6	130,4	129,2	129,6

3 pont

Ez alapján elkészíthető az oszlopdiagram.



3 pont

Összesen: 6 pont

b) A 2004. évi adatban az 1997. évihez képest már 7 év inflációja szerepel, ezért akkor lehet a két év forgalmának értékét összehasonlítani, ha az infláció hatását kiküszöböljük. 1 pont

A 2004. év forgalma az 1997-es áron: $\frac{129{,}6}{1{,}02^7} \approx$ 1 pont

$\approx 112{,}8$ milliárd euró. 1 pont

Ez az érték az 1997. évinek $\frac{112{,}8}{141{,}7} \cdot 100 \approx 79{,}6\%$-a. 1 pont

Tehát a csökkenés kb. 20,4%-os. 1 pont

Összesen: 5 pont

c) Számtani közép. 1 pont
A számtani közép értékét 8-cal megszorozva a nyolc év teljes forgalmát megkapjuk. 1 pont
A nyolc év teljes forgalma: 15,2 milliárd euró. 1 pont

Összesen: 3 pont

5. a) Az egyes sorokban az ülőhelyek száma számtani sorozatot alkot. 1 pont
$330 = a_1 + 2d$ 1 pont
$405 = a_1 + 7d$ 1 pont
Az egyenletrendszer megoldása: $d = 15$ és 1 pont
$a_1 = 300$, tehát az első sorban 300 ülőhely van. 1 pont

Összesen: 5 pont

b) A 13. sorban $300 + 12 \cdot 15 = 480$ ülőhely van. 1 pont

Összesen $\frac{300+480}{2} \cdot 13 = 5070$ férőhely van. 2 pont

Összesen: 3 pont

c) Az első vázát 100-féleképpen, a másodikat 99-féleképpen,
a harmadikat 98-féleképpen sorsolhatják ki a nézők között, így 1 pont
$100 \cdot 99 \cdot 98 =$ 1 pont
$= 970\,200$ kimenetele lehet a sorsolásnak. 1 pont

Összesen: 3 pont

d) Az első sor 300 vendége közül az 50 házaspár tagjai feltétlenül egymás szomszédjai, a párokat a sorrendet illetően tekinthetjük egy-egy elemnek is, így 250 különböző elemet kell sorba rendezni. 1 pont
Ezt 250!-féleképpen lehet megtenni. 1 pont
Bármelyik házaspár 2 tagja helyet cserélhet egymással, ez 2^{50} új sorrendet jelent. 2 pont
Összesen $250! \cdot 2^{50}$ elhelyezkedési lehetőség van. 1 pont

Összesen: 5 pont

6. a) A esemény:

az 5 fehér golyóból hármat $\binom{5}{3}$-féleképpen választhatunk ki, (1) a 10 golyóból hármat pedig $\binom{10}{3}$-féleképpen. 1 pont

(A kiválasztás sorrendje nem számít.)

$$P(\mathbf{A})=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=$$ 1 pont

$$=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}\approx 0{,}083$$ 1 pont

B esemény:
az 5 fehérből 1-et, a 4 sárgából 1-et és az 1 pirosat kell kiválasztani.
A kedvező esetek száma: $5\cdot 4\cdot 1=20$. Az összes esetek száma változatlan. 1 pont

$$P(\mathbf{B})=\frac{20}{\binom{10}{3}}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}\approx 0{,}167$$ 1 pont

C esemény:
vagy két fehér és egy más színű, vagy három fehér golyó kihúzásának a valószínűsége a kérdés.
Ezek diszjunkt (egymást kizáró) események, ezért valószínűségük összeadódik. 1 pont

Az első esetben a kedvező esetek száma: $\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{1}$. 1 pont

A második esetben a kedvező esetek száma megegyezik (1)-gyel.

$$P(\mathbf{C})=\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{1}+\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=$$ 1 pont

$$=\frac{50+10}{120}=\frac{1}{2}$$ 1 pont

Összesen: 9 pont

b) 1. megoldás
Nem lehetnek függetlenek, mert ha A bekövetkezik, akkor C is,
tehát A-ból következik C. 2 pont

Összesen: 2 pont

2. megoldás
A két esemény független, ha $P(\mathbf{AC})=P(\mathbf{A})\cdot P(\mathbf{C})$.

$$P(\mathbf{A})\cdot P(\mathbf{C})=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$ 1 pont

$P(\mathbf{AC})=P(\mathbf{A})=\frac{1}{12}$, azaz itt nem teljesül a függetlenség feltétele. 1 pont

Összesen: 2 pont

c) 1. megoldás

Számítsuk ki az egyes esetekben a piros golyó húzásának esélyét:

Elsőre pirosat húzunk: $p_1 = \frac{1}{10}$;

másodikra pirosat húzunk: $p_2 = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$;

(annak a valószínűsége, hogy első húzásra nem piros golyót húzunk ki $\frac{9}{10}$,

a második húzásra a piros golyó kihúzásának a valószínűsége $\frac{1}{9}$);

harmadikra pirosat húzunk: $p_3 = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$;

negyedikre pirosat húzunk: $p_4 = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{10}$;

ötödikre pirosat húzunk: $p_5 = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$. 2 pont

A várható érték: $\frac{1}{10} \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 2^2 + \frac{1}{10} \cdot 2^3 + \frac{1}{10} \cdot 2^4 + \frac{1}{10} \cdot 2^5$. 1 pont

Szabolcs nyereményének várható értéke 6,2 Ft. 1 pont

Mivel a játék kezdetén Szabolcs 5 Ft-ot fizetett Mártonnak, ezért neki kedvez a játék. 1 pont

Összesen: 5 pont

2. megoldás

Mind a 10 helyen ugyanolyan eséllyel lehet a piros golyó, ezért

akárhányadik helyen $\frac{1}{10}$ a kihúzás valószínűsége. 2 pont

A várható érték: $\frac{1}{10} \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 2^2 + \frac{1}{10} \cdot 2^3 + \frac{1}{10} \cdot 2^4 + \frac{1}{10} \cdot 2^5$. 1 pont

Szabolcs nyereményének várható értéke 6,2 Ft. 1 pont

Mivel a játék kezdetén Szabolcs 5 Ft-ot fizetett Mártonnak, ezért neki kedvez a játék. 1 pont

Összesen: 5 pont

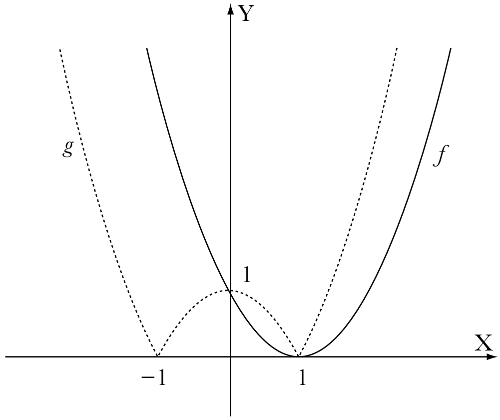
7. a) 1. megoldás

Elvégezve az összevonásokat: $(x-1)^2 < |x^2 - 1|$ 1 pont

A grafikus megoldáshoz a következő két függvényt ábrázoljuk:

$f(x) = (x-1)^2$ 2 pont

$g(x) = |x^2 - 1|$ 3 pont



A megoldás: $\mathbf{R}^{+}\setminus\{1\}$. 2 pont

Összesen: 8 pont

2. megoldás

A feladatot algebrai úton is megoldhatjuk.

Összevonás után: $(x-1)^2<|x^2-1|$. 1 pont

1. eset: $x^2-1\geq 0$, tehát $x\geq 1$ vagy $x\leq -1$ 1 pont

Ekkor $(x-1)^2<x^2-1$. 1 pont

$x>1$

Az értelmezési tartománnyal összevetve M_1: $x>1$. 1 pont

2. eset: $x^2-1<0$, tehát $-1<x<1$ 1 pont

Ekkor $(x-1)^2<1-x^2$. 1 pont

$0<x<1$

Az értelmezési tartománnyal összevetve M_2: $0<x<1$. 1 pont

Az egyenlőtlenség megoldása: $M_1\cup M_2=\mathbf{R}^{+}\setminus\{1\}$. 1 pont

Összesen: 8 pont

b) 1. megoldás

Az *a)* részben megadott egyenlőtlenség megoldáshalmaza mutatja, hogy az $x=1$ hely még csak nem is „kis” környezetében a másodfokú függvény eltérése az $y=5x$ lineáris függvénytől kisebb, mint az $y=3x+2$ lineáris függvénytől való eltérése. Éppen azt láttuk, hogy mindenhol igaz, tehát bármilyen szám megfelel a „kis” környezet sugarának. 3 pont

Összesen: 3 pont

2. megoldás

Egy adott pont környezetében az érintő közelíti legjobban a görbét.

A parabola $(1;5)$ pontjában húzott érintő meredeksége $y'=2x+3$ miatt 5, egyenlete $y=5x$.

Az $(1;5)$ pontra ugyancsak illeszkedő $y=3x+2$ egyenes nem érintő, így kevésbé közelíti a parabolát. 3 pont

Összesen: 3 pont

c) Az egyenes alatti terület egy trapéz területe: $T_e = \frac{5 \cdot 1{,}5 + 5 \cdot 0{,}5}{2} \cdot 1 = 5.$ 1 pont

A parabola alatti területet integrálszámítással kapjuk meg:

$T_p = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x^2 + 3x + 1\right)dx =$ 1 pont

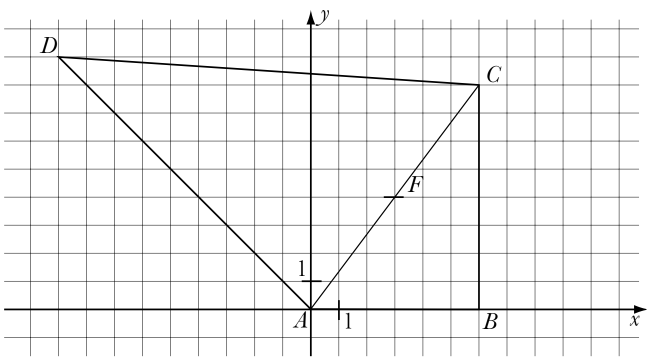
$= \left[\frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$ 1 pont

Behelyettesítve: $T_p = \left(\frac{27}{24} + \frac{27}{8} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{24} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{61}{12}.$ 1 pont

A közelítés hibája: $\frac{61}{12} - 5 = \frac{1}{12}.$ 1 pont

Összesen: 5 pont

8. a)



1. megoldás: skaláris szorzat segítségével.

$\overrightarrow{DA}(9; -9)$ 1 pont

$\left|\overrightarrow{DA}\right| = \sqrt{162}$ 1 pont

$\overrightarrow{DC}(15; -1)$ 1 pont

$\left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{226}$ 1 pont

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 144$ 1 pont

$\cos\alpha = \frac{144}{\sqrt{162}\cdot\sqrt{226}} \approx 0{,}7526$

$\alpha \approx 41{,}2°$ 1 pont

Összesen: 6 pont

2. megoldás: koszinusz tétel segítségével.

$\left|\overrightarrow{DA}\right| = \sqrt{162}$ 1 pont

$\left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{226}$ 1 pont

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = 10$ 1 pont

$10^2 = 162 + 226 - 2\cdot\sqrt{162}\cdot\sqrt{226}\cdot\cos\alpha$ 2 pont

$\alpha \approx 41{,}2°$ 1 pont

Összesen: 6 pont

b) Az ABC háromszög derékszögű, ezért a köré írható kör középpontja az átfogó felezőpontja: $F(3;\ 4)$. 1 pont

A kör sugara: $r = \frac{AC}{2} = 5$. 1 pont

Az FD távolság: $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$. 1 pont

A kör D ponttól mért távolsága: $FD - r = 13 - 5 = 8$. 1 pont

Az ABC háromszög köré írt kör az A, B és C pontoktól nulla távolságra, a D ponttól 8 egység távolságra van. Ha ezt a kört az F pontból nagyítjuk, sugarát 4 egységgel megnöveljük, akkor mind a négy ponttól 4 egység távolságra fog haladni. 2 pont

Ekkor a sugara 9 egység lesz. 1 pont

Összesen: 7 pont

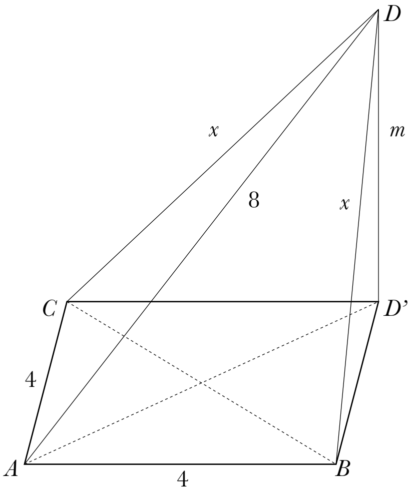
c) A négy csúcspont közül ha kiválasztunk hármat, e köré írható kör. (Semelyik három nincs egy egyenesen.) 1 pont

Ezt a kört a középpontból nagyítva vagy kicsinyítve – attól függően, hogy a negyedik pont a körön kívül vagy belül van – a három ponttól mért távolság egyformán nő, míg a negyedik ponttól mért távolság csökken. Így lesz egy olyan helyzet, ahol a kapott kör mind a négy ponttól egyenlő távolságra lesz. 1 pont

Mivel a kiinduló kört meghatározó három pont a négyből négyféleképpen választható ki, így 4 ilyen kör létezik. (Mivel az eredeti négy pont nem volt egy körön.) 1 pont

Összesen: 3 pont

9.



Számítsuk ki az *ABCD* gúla palástjának területét! 1 pont

Az *ABCD'* négyszög négyzet, ezért a gúla *ABC* alaplapja egyenlő szárú derékszögű háromszög. 1 pont*

Az *ABCD'* négyzet oldala 4 egység, így mindkét átlója $4\sqrt{2}$. 2 pont

A gúla *m* magassága az *ADD'* derékszögű háromszögből számolható Pitagorasz tételével: 1 pont*

$m=\sqrt{8^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=4\sqrt{2}$ 1 pont

A *BD*, illetve a *DC* élek hosszát az *CDD'* derékszögű háromszögből szintén Pitagorasz tételével 1 pont*

számíthatjuk ki: $x=\sqrt{32+4^2}=4\sqrt{3}$. 1 pont

Ismerjük az *ABD* háromszög oldalait: 8; 4 és $4\sqrt{3}$. Pitagorasz-tétel megfordításából következik, hogy ez a háromszög derékszögű. 2 pont

Így $T_{ABD}=\dfrac{4\cdot 4\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$. 1 pont

Mivel az *ABD* háromszög egybevágó az *ACD* háromszöggel, ezért területük egyenlő. 1 pont*

A *BCD* egyenlő szárú háromszögnek szintén ismerjük az oldalait:

$4\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$

A háromszögben az alaphoz tartozó magasság: $\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{10}$. 1 pont

$T_{BCD}=\dfrac{4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{10}}{2}=8\sqrt{5}$ 1 pont

A három oldallap területének összege: $8\sqrt{3}+8\sqrt{3}+8\sqrt{5}\approx 45{,}6\,\mathrm{m}^2$. 2 pont

Összesen: 16 pont

Ha a tanuló csak egy ábrát rajzol, amelyből látszik, hogy a szöveg alapján jó geometriai modellt készített, akkor maximum 4 pontot kaphat (csillaggal jelölt pontok).
Kerekített értékekkel való számolás is elfogadható.